Esercitazioni di Elettrotecnica

a cura dell'Ing. Antonio Maffucci

Parte III:

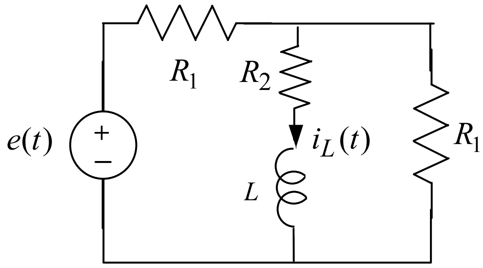
Circuiti in evoluzione dinamica

A.A. 2002/2003

ESERCITAZIONE N.10: Reti dinamiche del primo ordine.

ESERCIZIO 10.1

Considerato il seguente circuito nel quale all'istante $t = 0$ il generatore inverte la sua polarità, calcolare la corrente nell'induttore per ogni *t*.



$$e(t) = \begin{cases} 10\ V & t < 0 \\ -10\ V & t > 0 \end{cases}$$

$R_1 = 10\ \Omega$

$R_2 = 20\ \Omega$

$L = 2\ mH$

°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°°

Per $t < 0$ *il circuito è in regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito. Per tale ragione, posto* $R_a = R_1 // R_2$ *si ha:*

$$i_L(t) = e(t) \frac{R_a}{R_a + R_1} \frac{1}{R_2} = 0.2\ A \qquad t < 0 .$$

Per $t > 0$, *applicando le leggi di Kirchhoff si ha:*

$$R_1 i_x + R_1 i_y = e , \quad R_1 i_y = R_2 i_L + L \frac{di_L}{dt} , \quad i_x = i_y + i_L ,$$

da cui, sostituendo in modo da lasciare come unica incognita la corrente $i_L(t)$ *:*

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{\tau} i_L = \frac{e}{2L} \qquad \text{dove} \quad \tau \equiv \frac{L}{R_{eq}} , \quad R_{eq} = R_2 + \frac{R_1}{2} .$$

Allo stesso risultato si perviene valutando dapprima l'equivalente di Norton ai capi dell'induttore:

$$R_{eq} = R_2 + \frac{R_1}{2} \ \ e \ \ I_{cc}(t) = \frac{e(t)}{R_1 + 2R_2} ,$$

e quindi l'equazione differenziale si esprimerà come:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{\tau} = \frac{I_{cc}}{\tau} .$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è pari a $\lambda = -1/\tau = -12.5 \cdot 10^3\ s^{-1}$, *quindi la soluzione generale si esprime nella forma:*

$$i_L(t) = K e^{-12.5 \cdot 10^3 t} + i_{LP}(t) ,$$

dove $i_{LP}(t)$ *è una soluzione particolare che si può valutare calcolando la soluzione di regime. Essendo il regime a cui si tende stazionario, utilizzando quanto ottenuto per* $t < 0$ *è facile ottenere*

$$i_{LP}(t) = -0.2\ A$$

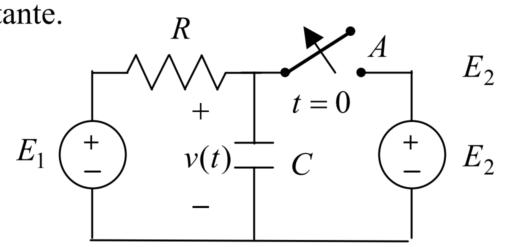
La costante K si ottiene imponendo la continuità della variabile di stato $i_L(t)$

$$i_L(0^-) = i_L(0^+) \quad \Rightarrow \quad 0.2 = K - 0.2 \quad \Rightarrow \quad K = 0.4 ,$$

da cui: $\quad i_L(t) = -0.2 + 0.4 e^{-12.5 \cdot 10^3 t} \qquad t > 0 .$

ESERCIZIO 10.2

Nel seguente circuito all'istante $t = 0$ si apre l'interruttore A. Calcolare la tensione sul condensatore $v(t)$ per ogni istante.



$E_1 = 8\,V, \quad E_2 = 2\,V$
$R = 10\,k\Omega, \quad C = 2\,mF$

ooooooooooooooooooooooooooooo

Per $t < 0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto. Per tale ragione si ha:

$$v(t) = E_2 = 2\,V.$$

Per $t > 0$, applicando la LKT all'unica maglia e la caratteristica del condensatore si ottiene facilmente l'eq. differenziale di primo ordine nell'incognita $v(t)$

$$Ri + v = E_1\,, \quad i = C\frac{dv}{dt}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{E_1}{\tau} \quad \text{dove} \quad \tau = RC\,.$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è pari a $\lambda = -1/\tau = -0.05\,s^{-1}$, quindi la soluzione generale si esprime nella forma:

$$v(t) = Ke^{-0.05t} + v_P(t)\,,$$

dove $v_P(t)$ è una soluzione particolare che si può valutare calcolando la soluzione di regime. Poiché per $t \to \infty$ si tende ad un regime stazionario, il condensatore si comporta come un circuito aperto ai capi del quale ci sarà

$$v_P(t) = E_1 = 8\,V.$$

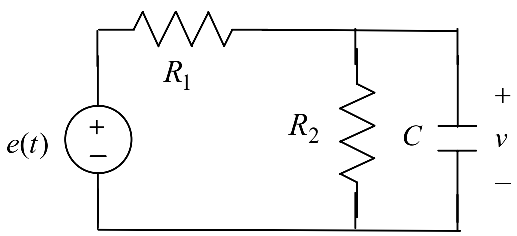
Resta da determinare la costante K, che si ottiene dalla condizione iniziale, ottenuta imponendo la continuità della variabile di stato $v(t)$

$$v(0^-) = v(0^+) \quad \Rightarrow \quad 2 = K + 8 \quad \Rightarrow \quad K = -6\,,$$

da cui $\quad v(t) = 8 - 6e^{-0.05t} \qquad t > 0\,.$

ESERCIZIO 10.3

Il circuito in esame è in regime stazionario per $t < 0$. Valutare la tensione $v(t)$ per $t > 0$.



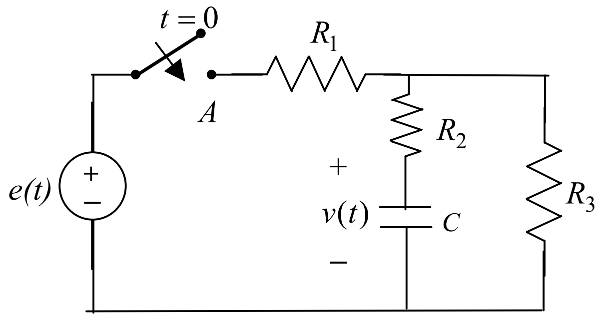
$e(t) = 50\,V \quad t > 0$
$v(t = 0) = 10\,V, \quad C = 1\,mF$
$R_1 = 20\,\Omega, \quad R_2 = 24\,\Omega.$

Risultato: $v(t) = 27.3 - 17.3e^{-91.7t}\ V$.

ESERCIZIO 10.4

Il seguente circuito è a riposo fino a $t = 0$, istante in cui si chiude l'interruttore A. Calcolare:

a) la costante di tempo τ del circuito;
b) la tensione ai capi del condensatore per $t > 0$.



$$e(t) = 10\cos(\omega t)$$
$$\omega = 100 rad/s$$
$$R_1 = 20\,\Omega,\quad R_2 = 5\,\Omega$$
$$R_3 = 10\,\Omega,\quad C = 1\,mF$$

○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○○

a) Per calcolare la costante di tempo basta valutare la resistenza dell'equivalente di Thévenin visto ai capi del condensatore:

$$R_{eq} = (R_1 // R_3) + R_2 = \frac{35}{3}\Omega \qquad \Rightarrow \qquad \tau = R_{eq}C = 11.7\ ms$$

b) Per $t < 0$ *il circuito è a riposo, quindi* $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 0$. *Per* $t > 0$, *ricavando la tensione a vuoto dell'equivalente di Thévenin visto ai capi del condensatore si ha:*

$$V_0(t) = \frac{e(t)R_3}{R_1 + R_3}.$$

Applicando le leggi di Kirchhoff al circuito ottenuto sostituendo ai capi di C il generatore equivalente di Thévenin si ricava l'equazione differenziale nell'incognita v_c:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{\tau} = \frac{V_0}{\tau}.$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è pari a $\lambda = -1/\tau = -85.5\ s^{-1}$, *quindi la soluzione generale si esprime nella forma:*

$$v_c(t) = A\exp(-85.5t) + v_{cp}(t),$$

dove $v_{cp}(t)$ *è una soluzione particolare che si può valutare calcolando la soluzione di regime, attraverso il metodo fasoriale. Posto:*

$$\overline{E} = 10,\quad \dot{Z}_1 = R_1 = 20,\qquad \dot{Z}_2 = R_2 - \frac{j}{\omega C} = 5 - 10j,\quad \dot{Z}_3 = R_3 = 10,$$

e applicando ripetutamente la regola del partitore di tensione si ha:

$$\dot{Z}_x = \dot{Z}_2 // \dot{Z}_3 \;\Rightarrow\; \overline{V}_2 = \overline{E}\frac{\dot{Z}_x}{\dot{Z}_x + \dot{Z}_1} \;\Rightarrow\; \overline{V}_c = \overline{V}_2 \frac{\dot{Z}_c}{R_2 + \dot{Z}_c} = 2.17e^{-j0.86} \Rightarrow\; v_{cp}(t) = 2.17\cos(100t - 0.86)$$

Resta da determinare la costante A, che si ottiene imponendo la condizione iniziale:

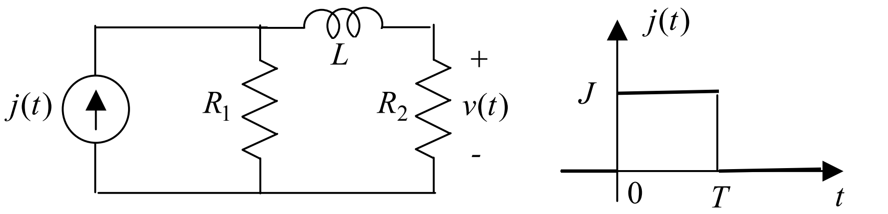
$$t = 0^+:\quad v_c(0^+) = 0 = A + 2.17\cos(-0.86) \quad\Rightarrow\quad A = -1.41$$

Quindi in definitiva si ottiene:

$$v_c(t) = -1.41\exp(-85.5t) + 2.17\cos(100t - 0.86)\ \ V \qquad t > 0\,.$$

ESERCIZIO 10.5

In figura è riportato lo schema equivalente di un grilletto elettronico per pistola. L'uscita del sistema è il segnale di tensione $v(t)$ prelevato ai capi di R_2. Determinare tale segnale per $0 < t < 0.3\ s$.



$J = 40\ A, \quad T = 1\ ms$
$R_1 = 30\ \Omega, \quad R_2 = 20\ \Omega$
$L = 50\ mH$

ooooooooooooooooooooooooooooooo

Per $t < 0$ *il circuito è a riposo, quindi* $v(t) = 0$.
Per $0 < t < T$*, applicando le leggi di Kirchhoff e le caratteristiche dei bipoli si ha:*

$$R_1 i_1 = L\frac{di_L}{dt} + v, \qquad j = i_1 + i_L, \qquad i_L = \frac{v}{R_2},$$

da cui si ricava l'equazione differenziale nell'incognita $v(t)$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L}v = \frac{R_1 R_2}{L}j \ ,$$

la cui omogenea associata fornisce un'equazione caratteristica avente radice pari a $\lambda = -(R_1 + R_2)/L = -1000\ s^{-1}$. *Pertanto si ha:*

$$v(t) = Ke^{-1000t} + v_P(t),$$

dove $v_P(t)$ *è una soluzione particolare che si può valutare calcolando la soluzione di regime. Per* $t \to \infty$ *si tende ad un regime stazionario, quindi l'induttore si comporta come un corto circuito:*

$$v_P(t) = J\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 480\ V.$$

Resta da determinare la costante K, che si ottiene dalla condizione iniziale, ottenuta imponendo la continuità $v(t)$ *(tale grandezza è continua in quanto* $v(t) = R_2 i_L(t)$*)*

$$v(0^-) = v(0^+) \quad \Rightarrow \quad 0 = K + 480 \quad \Rightarrow \quad K = -480,$$

da cui $\quad v(t) = 480(1 - e^{-1000t}) \qquad 0 < t < T$.

Per $t > T$ *l'equazione differenziale sarà*

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R_1 + R_2}{L}v = 0 \ ,$$

e quindi ragionando come prima si avrà

$$v(t) = He^{-1000t},$$

dove H è una costante arbitraria, determinata imponendo la continuità $v(t)$ *per* $t = T$

$$v(T^-) = v(T^+) \quad \Rightarrow \quad 480(1\text{-}e^{-1}) = He^{-1} \quad \Rightarrow \quad H = 480(e\text{-}1),$$

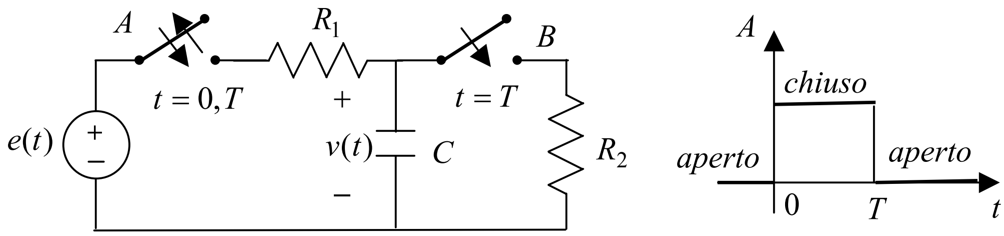
da cui $\quad v(t) = 480(e - 1)e^{-1000t} \quad V, \quad per\ t > T$.

ESERCIZIO 10.6

La seguente rete rappresenta lo schema elettrico equivalente del circuito di carica della stazione spaziale orbitante. La carica avviene tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = T$, intervallo in cui l'interruttore A resta chiuso. Per $t > T$, invece, il condensatore C viene collegato al resto della rete attraverso la chiusura dell'interruttore B. Supponedo la rete a riposo per $t < 0$, valutare:

a) la tensione sul condensatore $v(t)$ per $0 < t < T$;

b) l'energia massima $W_{\max}$ erogabile da C per $t > T$;



$e(t) = 100 sin(20t)\ V$
$R_1 = 10\ \Omega$
$C = 10\ mF$
$T = 2\ s$

ooooooooooooooooooooooooooooooo

a) Per $t < 0$ il circuito è a riposo, quindi $v(t) = 0$. Per $0 < t < T$ il circuito si riduce ad una semplice rete RC, descritta dall'equazione

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{e}{\tau} \quad \text{dove} \quad \tau = R_1 C .$$

La radice dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda = -1/\tau = -10\ s^{-1}$, quindi:

$$v(t) = Ke^{-10t} + v_P(t),$$

dove $v_P(t)$ si può valutare col metodo fasoriale ($t \to \infty$ si tende ad un regime sinusoidale):

$$\overline{E} = 10, \quad \dot{Z}_1 = R_1 = 10, \ \dot{Z}_C = -\frac{j}{\omega C} = -5j,$$

$$\overline{V}_P = \overline{E}\frac{\dot{Z}_c}{R_1 + \dot{Z}_c} = 44.7e^{-j1.11} \Rightarrow \ v_P(t) = 44.7 sin(20t - 1.11)\ V$$

La costante K si ottiene dalla condizione iniziale

$$v(0^-) = v(0^+) \quad \Rightarrow \quad 0 = K + 44.7 sin(-1.11) \quad \Rightarrow \quad K = 40,$$

da cui $v(t) = 40e^{-10t} + 44.7 sin(20t - 1.11)\ V$.

b) All'istante T la tensione sul condensatore vale $v(T) = 40e^{-20} + 44.7 sin(38.89) = 41.5\ V$ e quindi l'energia massima erogabile da C è pari a:

$$W_{\max} = \frac{1}{2}Cv^2(T) = 8.6\ J .$$

c) per $t \to \infty$ la tensione

Risultato: *a)* $v(t) = 40e^{-10t} - 40\cos(20t) + 20 sin(20t)\ V$ per $0 < t < T$;

b) $W_{\max} = \frac{1}{2}Cv^2(T) = 8.64\ J$;

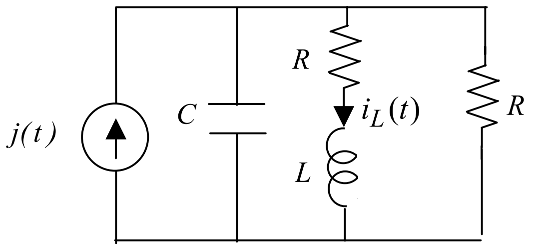
ESERCITAZIONE N.11: Reti dinamiche del secondo ordine

ESERCIZIO 11.1

Il seguente circuito è in regime stazionario fino a $t=0$, quando il generatore si spegne. Calcolare:

a) il valore delle grandezze di stato all'istante $t=0^+$

b) la corrente $i_L(t)$ per t > 0



$$j(t)=\begin{cases}20 \;\; A & t<0\\ 0 \;\; A & t>0\end{cases}$$
$R=2\ \Omega$
$L=10\ \mu H$
$C=5\ \mu F$

ooooooooooooooooooooooooooooooo

a) Per $t<0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Per tale ragione:

$$i_L(t)=j(t)/2=10\ A \;\; , \;\; v_C(t)=j(t)R/2=20\ V \qquad\qquad t<0.$$

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-)=v_c(0^+)=20\ V$ *e* $i_L(0^-)=i_L(0^+)=10\ A$.

b) Per $t>0$ il circuito è in evoluzione libera. Applicando le leggi di Kirchhoff e le caratteristiche dei bipoli si ricavano le equazioni di stato del sistema:

$$i_L+C\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_c}{R}=0, \qquad v_C-Ri_L-L\frac{di_L}{dt}=0$$

Ricavando v_C dalla prima e sostituendola nella seconda si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+\left(\frac{1}{RC}+\frac{R}{L}\right)\frac{di_L}{dt}+\frac{2}{LC}i_L=0,$$

la cui equazione caratteristica ammette le radici $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta=10^5(-1.5\pm1.3j)$. La soluzione si può esprimere, quindi, nella forma: $i_L(t)=\exp(\alpha t)[k_1\cos(\beta t)+k_2 sin(\beta t)]$, dove le costanti k_1, k_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su i_L e su di_L/dt:

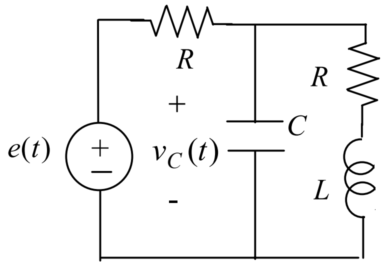
$$i_L(0^+)=10=k_1$$
$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+}=\frac{1}{L}\left[v_C(0^+)-Ri_L(0^+)\right]=0=\alpha k_1+\beta k_2 \quad\Rightarrow\quad k_2=-\frac{\alpha k_1}{\beta}=11.5$$

La soluzione è, quindi:

$$i_L(t)=\exp(-1.5\cdot10^5 t)[10\cos(1.3\cdot10^5 t)+11.5 sin(1.3\cdot10^5 t)] \qquad t>0.$$

ESERCIZIO 11.2

Con riferimento al seguente circuito, calcolare la tensione $v_C(t)$ in ogni istante.



$$e(t) = \begin{cases} 20\ V & t<0 \\ -20\ V & t>0 \end{cases}$$

$R = 1\,\Omega$

$L = 5\ \mu H$

$C = 5\ \mu F$

ooooooooooooooooooooooooooooooo

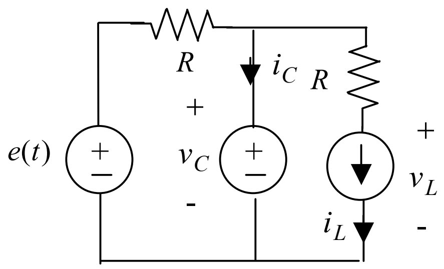
a) Per $t<0$ il circuito è in regime stazionario, quindi il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito. Per tale ragione:

$$i_L(t) = e(t)/2R = 10\ A\ ,\quad v_C(t) = e(t)/2 = 10\ V \qquad t<0 .$$

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 10\ V$ *e* $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 10\ A$.

b) Per $t>0$ il circuito è forzato dal generatore e(t), a partire dalle condizioni iniziali individuate al punto a). Risolvendo il circuito resistivo associato mostrato in figura:

$$i_C = \frac{e - v_C}{R} - i_L\ ,\qquad v_L = v_C - Ri_L$$



da cui le equazioni di stato:

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{e - v_C}{RC} - \frac{i_L}{C},\qquad \frac{di_L}{dt} = \frac{v_C}{L} - \frac{Ri_L}{L}.$$

Ricavando i_L dalla prima e sostituendola nella seconda si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)\frac{dv_c}{dt} + \frac{2}{LC}v_c = \frac{1}{RC}\frac{de}{dt} + \frac{e}{LC}.$$

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata fornisce: $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta = 2\cdot 10^5(-1\pm j)$, *quindi la soluzione si può esprimere nella forma:*

$$v_C(t) = e^{\alpha t}[k_1 \cos(\beta t) + k_2 sin(\beta t)] + v_{CP}(t),$$

dove $v_{CP}(t)$ è una soluzione particolare che può essere scelta come la soluzione di regime a cui il circuito tende per $t \to \infty$ (regime stazionario):

$$v_{CP}(t) = e(t)/2 = -10\ V .$$

Le costanti k_1, k_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su v_C e su dv_C/dt:

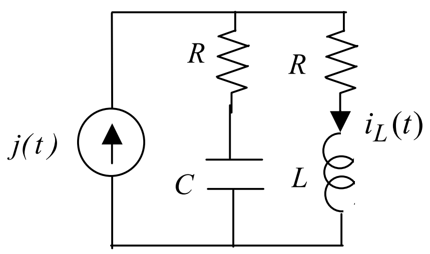
$$v_C(0^+) = 10 = k_1 - 10 \quad\Rightarrow\quad k_1 = 20;$$

$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{0^+} = -\frac{1}{C}\left[i_L(0^+) + \frac{v_C(0^+)}{R}\right] = -4\cdot 10^6 = \alpha k_1 + \beta k_2 \quad\Rightarrow\quad k_2 = -\frac{1}{\beta}\left(4\cdot 10^6 + \alpha k_1\right) = 0.$$

La soluzione è, quindi: $v_C(t) = 20e^{-2\cdot 10^5 t}\cos(2\cdot 10^5 t) - 10 \qquad t>0$.

ESERCIZIO 11.3

Il seguente circuito è in regime sinusoidale fino $t=0$, istante in cui il generatore si spegne. Calcolare la corrente $i_L(t)$ in ogni istante.



$$j(t)=\begin{cases}10\cos(100t)\ \ A & t<0\\ 0\ \ A & t>0\end{cases}$$
$R=0.5\ \Omega$
$L=10\ mH$
$C=50\ mF$

ooooooooooooooooooooooooooooo

Per $t<0$ il circuito è in regime sinusoidale, quindi si può ricorrere al metodo fasoriale, ponendo:

$$\bar{J}=10,\ \dot{Z}_1=\dot{Z}_C+\dot{Z}_R=0.5-0.2j,\ \dot{Z}_2=\dot{Z}_L+\dot{Z}_R=0.5+j.$$

Per il partitore di corrente, nell'induttore si ha:

$$\bar{I}_L=\bar{J}\frac{\dot{Z}_1}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2}=2.07-3.66j=4.21\exp(-1.06j)\quad\Rightarrow\quad i_L(t)=4.21\cos(100t-1.06)\ \ A.$$

Applicando la LKC si ricava la corrente nel condensatore $\bar{I}_C=\bar{J}-\bar{I}_L=7.93+3.66j$, da cui la tensione:

$$\bar{V}_C=\dot{Z}_C\bar{I}_C=1.74\exp(-1.14j)\quad\Rightarrow\quad v_C(t)=1.74\cos(100t-1.14)\ \ V.$$

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-)=v_c(0^+)=0.73\,V$, $i_L(0^-)=i_L(0^+)=2.07\ A$.

Per $t>0$ il circuito è in evoluzione libera. Applicando la LKT all'unica maglia si ottiene:

$$v_C+2Ri_L+L\frac{di_L}{dt}=0.$$

Derivando tale equazione e sostituendovi la caratteristica di C si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{2R}{L}\frac{di_L}{dt}+\frac{1}{LC}i_L=0,$$

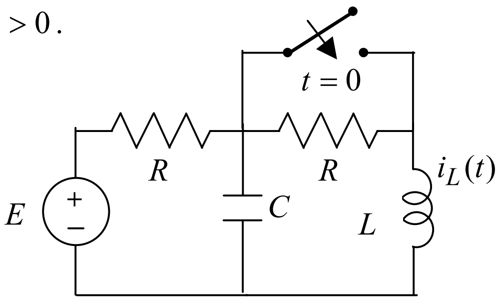
la cui equazione caratteristica ammette le radici $\lambda_1=-72.4$ e $\lambda_1=-27.6$. La soluzione si può esprimere, quindi, nella forma: $i_L(t)=k_1\exp(\lambda_1 t)+k_2\exp(\lambda_2 t)$, dove le costanti k_1,k_2 vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su i_L e su di_L/dt:

$$i_L(0^+)=2.07=k_1+k_2,$$
$$\left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+}=-\frac{v_C(0^+)+2Ri_L(0^+)}{L}=-280=\lambda_1k_1+\lambda_2k_2\quad\Rightarrow\quad k_1=4.98,\ k_2=-2.91.$$

Per $t>0$ la soluzione è, quindi, data da: $i_L(t)=4.98\exp(-72.4t)-2.91\exp(-27.6t)\,A.$

ESERCIZIO 11.4

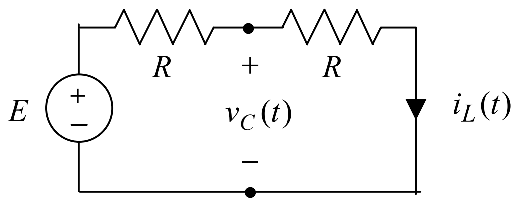
La rete in figura è in regime stazionario fino $t = 0$, istante in cui si chiude l'interruttore. Calcolare la corrente $i_L(t)$ per $t > 0$.



$E = 2\ V$
$R = 1/3\ \Omega$
$L = 1\ mH$
$C = 2\ mF$

oooooooooooooooooooooooooooooo

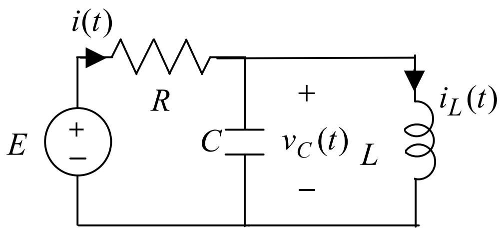
Il circuito da analizzare per $t < 0$ *è disegnato a lato.*
Essendo in regime stazionario, il condensatore si comporta come un circuito aperto e l'induttore come un corto circuito:



$i_L(t) = E/2R = 3\ A$, $v_C(t) = E/2 = 1\,V$ $\quad (t < 0)$.

Per la continuità delle variabili di stato si ha: $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 1\,V$ *e* $i_L(0^-) = i_L(0^+) = 3\ A$.

Il circuito da analizzare per $t > 0$ *è disegnato a lato.*
Applicando le leggi di Kirchhoff e le caratteristiche dei bipoli si ricava il sistema:



$$i_L + C\frac{dv_C}{dt} = i, \qquad v_C = L\frac{di_L}{dt}, \qquad Ri + v_C = E.$$

Ricavando i *dalla terza e sostituendo nella prima ed infine sostituendo la* v_C *ottenuta dalla seconda si ottiene l'equazione differenziale:*

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{LC} i_L = \frac{E}{RLC}.$$

Le radici dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata sono: $\lambda_1 = -1000, \lambda_2 = -500$, *quindi la soluzione si può esprimere nella forma:*

$$i_L(t) = k_1 e^{-1000t} + k_2 e^{-500t} + i_{LP}(t),$$

dove $i_{LP}(t)$ *è una soluzione particolare che può essere scelta come la soluzione di regime a cui il circuito tende per* $t \to \infty$ *(regime stazionario):* $i_{LP}(t) = E/R = 6\ A$..

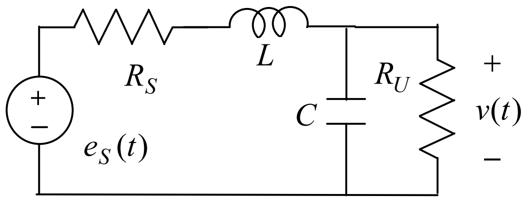
Le costanti k_1, k_2 *vanno determinate imponendo le condizioni iniziali su* i_L *e su* di_L/dt:

$$i_L(0^+) = 3 = k_1 + k_2 + 6; \qquad \left.\frac{di_L}{dt}\right|_{0^+} = \frac{1}{L} v_C(0^+) = 1000 = -1000k_1 - 500k_2,$$

da cui: $k_1 = 1, k_2 = -4$, e quindi la soluzione per $t > 0$ è $i_L(t) = e^{-1000t} - 4e^{-500t} + 6\ A$.

ESERCIZIO 11.5

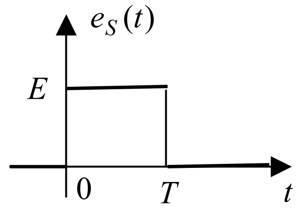
Il seguente circuito rappresenta lo schema equivalente di un sistema digitale *trasmettitore-canale-ricevitore*. Calcolare la tensione sul ricevitore (R_U) in ogni istante.



$E = 6\,V, \quad T = 1\,ns$

$R_S = R_U = 50\,\Omega$

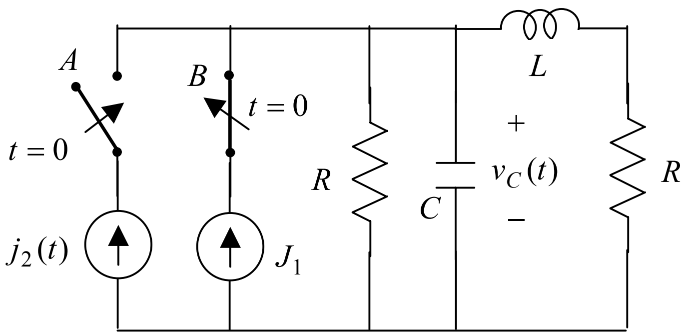
$L = 2\,nH, \quad C = 10\,pF$



Risultato: $v(t) = 0\,V$ per $t < 0$; $v(t) = -3.74e^{-4.45 \cdot 10^9 t} + 0.74e^{-22.55 \cdot 10^9 t} + 3\,V$ per $0 < t < T$;
$v(t) = 320e^{-4.45 \cdot 10^9 t} - 4.6 \cdot 10^9\, e^{-22.55 \cdot 10^9 t}$ per $t > T$.

ESERCIZIO 11.6

All'istante $t = 0$ si chiude l'interruttore A e si apre l'interruttore B. Calcolare la tensione sul condensatore per ogni istante di tempo.



$J_1 = 2\,A$

$j_2(t) = 2sin(\omega t)\,A$

$\omega = 10^6\,rad/s$

$R = 1\,\Omega, \quad L = 1\,mH$

$C = 1\,mF$

Risultato: $v_C(t) = 1\,V$ per $t < 0$; $v_C(t) = 2.28e^{-10^6 t}\cos(10^6 t + 0.90) + 1.26\cos(10^6 t - 0.32)\,V$ per $t > 0$.
